

LUCRAREA 11

REPARTIZAREA OPTIMALĂ A PUTERILOR ACTIVE ÎNTRE CENTRALELE ELECTRICE ALE UNUI SISTEM ELECTROENERGETIC FOLOSIND PROGRAMAREA NELINIARĂ CU RESTRICȚII

11.1. Aspecte generale privind programarea neliniară cu restricții

Marea majoritate a problemelor practice conțin limitări privind domeniul admis pentru vectorul variabilelor de optimizare $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ și prin aceasta, soluția optimă trebuie să fie aleasă în mod obligatoriu din domeniul respectiv.

Deci, în general, problema care trebuie rezolvată se referă la determinarea valorii variabilelor care asigură extremul unei funcții obiectiv:

$$\mathbf{FO:} \quad \min F(X) = \min F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (11.1)$$

în prezența restricțiilor,

$$\begin{aligned} \mathbf{RE:} \quad & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (11.2)$$

Condițiile care trebuie să fie satisfăcute pentru un optim cu restricții, local sau global au fost stabilite de Kuhn și Tucker plecând de la modelele clasice ale multiplicatorilor lui Lagrange.

Dacă $F(X)$ și $g_i(X)$ au derivate parțiale de ordinul întâi, în raport cu $x_j, j = 1, \dots, n$, considerând în relația (11.2) doar restricțiile de egalitate, funcția Lagrange asociată problemei (11.1) - (11.2) are următoarea formă:

$$\phi(x, \lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X) \quad (11.3)$$

unde $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, sunt multiplicatorii Lagrange.

Un punct extrem al funcției $\Phi(X, \lambda)$, care poate fi punctul de minim, se poate obține prin anularea derivatelor de ordinul 1, adică:

$$\frac{\partial \Phi(X, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(X)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (11.4)$$

$$\frac{\partial \Phi(X, \lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(X) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (11.5)$$

Relația (11.4) indică faptul că în punctul de minim gradientul funcției obiectiv este o combinație liniară a gradientuților restricțiilor. Relațiile (11.4) și (11.5) reprezintă condițiile necesare dar nu și suficiente pentru minim. Suficiența este asigurată numai dacă funcția obiectiv $F(X)$ este convexă, iar restricțiile sunt liniare. În concluzie, minimul funcției $F(X)$, în prezența restricțiilor de egalitate $g_i(X) = 0$, este obținut pentru acele valori ale lui X care minimizează fără restricții funcția auxiliară $\Phi(X, \lambda)$.

Pentru folosirea acestei metode se aleg inițial valori pentru $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, și cu acestea se rezolvă sistemul (11.4) de n ecuații cu n necunoscute, $x_j, j = 1, \dots, n$. Soluțiile găsite și care depind de valorile lui λ_i sunt introduse în cele m restricții. Dacă acestea nu sunt satisfăcute, se aleg alte valori pentru $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, până când cele $(n+m)$ ecuații vor fi satisfăcute de valorile alese.

Conceptul multiplicatorilor lui Lagrange a fost extins și la cazul restricțiilor de inegalitate. Astfel, condițiile Kuhn-Tucker obținute în această situație sunt:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (11.6)$$

$$g_i(X) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (11.7)$$

$$\lambda_i g_i(X) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (11.8)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (11.9)$$

Trebuie făcută mențiunea că, în situația în care $F(X)$ și $g_i(X)$ sunt convexe, relațiile (11.6)-(11.9) ne conduc la minimumul global.

Semnul multiplicatorilor λ_i , $i = 1, \dots, m$, se schimbă în funcție de natura optimului căutat și de semnul restricțiilor.

Condițiile Kuhn-Tucker ne indică faptul că pentru o restricție care nu este activă, de exemplu,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i,$$

multiplicatorul $\lambda_i = 0$.

11.2. Modelul matematic corespunzător repartizării optime a puterilor active între centralele electrice

Dacă se cunoaște puterea cerută la nivelul consumatorilor și dacă se cunosc caracteristicile de consum (cost) ale grupurilor din centrale, se poate pune întrebarea cum trebuie să fie repartizată puterea cerută de sistem, între centralele respective, astfel încât costul de producție, transport și distribuție să fie minim.

În acest scop se va dezvolta modelul matematic corespunzător repartizării optime a puterilor active între centralele interconectate ale unui sistem electroenergetic în următoarele ipoteze:

- structura instalațiilor în funcțiune rămâne constantă;
- sistemul funcționează într-un anumit regim permanent (puterile cerute de consumatori rămân constante pentru perioada studiată).

În continuare se consideră faptul că sistemul electroenergetic este format din m centrale termoelectrice, dintre care centrala 1 este centrală de echilibru. Se consideră cunoscute caracteristicile de consum de combustibil ale centralelor implicate în procesul de optimizare, cât și puterea cerută de sistem, P_c .

$$\begin{aligned} B_i(P_i) &= B_{2i} \cdot P_i^2 + B_{1i} \cdot P_i + B_{0i}, \quad i = \overline{1, m} \\ \underline{P}_i &\leq P_i \leq \overline{P}_i, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \tag{11.10}$$

Modelul de optimizare este următorul:

$$\mathbf{FO:} \quad \min B(P) = \min \sum_{i=1}^m (B_{2i} \cdot P_i^2 + B_{1i} \cdot P_i + B_{0i}) \quad (11.11)$$

$$\mathbf{RE:} \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^m P_i &= P_c + \Delta P \\ \underline{P}_i &\leq P_i \leq \overline{P}_i \end{aligned} \quad (11.12)$$

unde:

ΔP – pierderile totale de putere în rețea;

P_c – puterea activă totală cerută în sistem (include și puterea debitată de CHE, respectând convenția de semn).

Modelul de optimizare (11.11 – 11.12) aparține programării neliniare cu restricții. Pentru rezolvare poate fi utilizată orice metodă de optimizare aparținând programării neliniare.

11.3. Rezolvarea problemelor de programare neliniară cu restricții cu funcții MatLab

În general, o problemă de determinare a minimumului unei funcții neliniare în prezența unor restricții de egalitate sau inegalitate poate avea următoarea formă:

$$\min_X F(X) \quad (11.3)$$

în prezența restricțiilor:

$$\begin{aligned} g(X) &= A \cdot X \leq b \\ h(X) &= A_{eg} \cdot X = b_{eg} \\ X_{\min} &\leq X \leq X_{\max} \end{aligned} \quad (11.4)$$

unde:

$X, b, b_{eg}, X_{\min}, X_{\max}$ – vectori;

$g(X)$ și $h(X)$ – funcții ce returnează vectori;

A, A_{eg} – matrice;

$F(X)$ – funcție ce returnează un scalar.

Sintaxele pentru apelarea funcției Matlab sunt următoarele:

$$X = \mathbf{fmincon}(@fun, X0, A, b) \quad (a)$$

$$X = \mathbf{fmincon}(@fun, X0, A, b, A_{eg}, b_{eg}) \quad (b)$$

$$X = \mathbf{fmincon}(@fun, X0, A, b, A_{eg}, b_{eg}, X_{min}, X_{max}) \quad (c)$$

$$X = \mathbf{fmincon}(@fun, X0, A, b, A_{eg}, b_{eg}, X_{min}, X_{max}, @restrictii) \quad (d)$$

$$X = \mathbf{fmincon}(@fun, X0, A, b, A_{eg}, b_{eg}, X_{min}, X_{max}, @restrictii, options) \quad (e)$$

$$[X, val_functie, convergenta, informatii] = \mathbf{fmincon}(...) \quad (f)$$

unde:

- (a) procesul are ca punct de plecare punctul $X0$ și găsește minimumul funcției descrisă în fișierul fun , în prezența restricțiilor de inegalitate $A \cdot X \leq b$. $X0$ poate fi un vector, un scalar sau o matrice;
- (b) minimizează funcția descrisă în fișierul fun în prezența restricțiilor de egalitate și inegalitate $A_{eg} \cdot X = b_{eg}$, $A \cdot X \leq b$. Dacă restricțiile de inegalitate nu există atunci $A = []$ și $b = []$;
- (c) definește o mulțime de limite/granițe inferioare și superioare, corespunzătoare variabilelor de optimizat X , astfel încât soluția se găsește întotdeauna în intervalul $[X_{min}, X_{max}]$. Dacă restricțiile de egalitate nu există atunci $A_{eg} = []$ și $b_{eg} = []$;
- (d) minimizează funcția descrisă în fișierul fun , în prezența restricțiilor de egalitate $h(X)$ sau inegalitate $g(X)$, descrise în fișierul **restrictii**. Dacă X_{min} , respectiv X_{max} nu există atunci: $X_{min} = []$ și/sau $X_{max} = []$;
- (e) minimizează funcția descrisă în fișierul fun , în prezența restricțiilor de egalitate $h(X)$ sau inegalitate $g(X)$, descrise în fișierul *restrictii*, cu parametri de optimizare precizați în structura *options*;
- (f) X – soluția problemei;
val_functie – returnează valorile funcțiilor obiectiv corespunzătoare soluției găsite;
convergenta – furnizează informații cu privire la convergența procesului. Dacă *convergenta* = 1, funcția converge la soluția X , dacă *convergenta* = 0, numărul maxim de evaluări a funcției sau numărul maxim de iterații a fost depășit, iar dacă *convergenta* = -1 procesul de optimizare este divergent;

informatii – oferă informații despre procesul de optimizare (numărul de iterații, numărul de evaluări ale funcției, algoritmul folosit).

Parametrii de intrare și ieșire sunt următorii:

fun – fișier funcție ce conține expresiile funcțiilor obiectiv. Acest fișier are ca variabilă de intrare X , iar ca variabilă de ieșire un scalar F , a cărui valoare reprezintă funcția obiectiv evaluată în punctul X . Fișierul *fun* poate fi apelat astfel:

$$\mathbf{function} F = \mathbf{fun}(X)$$

restrictii – fișier funcție, în care se introduc atât restricțiile neliniare de inegalitate, cât și cele de egalitate $g(X) \leq 0$, $h(X) = 0$. Fișierul are ca variabilă de intrare un vector X , iar ca variabile de ieșire, doi vectori g și h . Fișierul poate fi apelat astfel:

$$\mathbf{function} [g, h] = \mathbf{restrictii}(X).$$

11.4. Exemplu numeric

Se consideră un sistem format din trei centrale debitând într-un nod și se cere minimizarea consumului total de combustibil convențional, pentru o putere cerută de nodul consumator. Pierderile de putere în rețea se consideră constante și incluse în puterea absorbită în nodul consumator.

Cele trei caracteristici de consum orar de combustibil ale centralelor, date la ieșirea din centrale și limitele tehnice corespunzătoare sînt:

$$B_1(P_1) = P_1^2 \cdot 0,0008 + P_1 \cdot 0,24 + B_{01}, \quad 50 \leq P_1 \leq 195 MW$$

$$B_2(P_2) = P_2^2 \cdot 0,001 + P_2 \cdot 0,16 + B_{02}, \quad 70 \leq P_2 \leq 300 MW$$

$$B_3(P_3) = P_3^2 \cdot 0,001 + P_3 \cdot 0,18 + B_{03}, \quad 60 \leq P_3 \leq 250 MW$$

Sarcina ce trebuie satisfăcută este de 625 MW.

Rezolvare:

Se construiește modelul matematic de optimizare:

$$\mathbf{FO:} \quad \min(B) = 0,24P_1 + 0,0008P_1^2 + 0,16P_2 + 0,001P_2^2 + 0,18P_3 + 0,001P_3^2$$

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= 625 \\ 50 - P_1 &\leq 0; P_1 - 195 \leq 0; \\ \mathbf{RE:} \quad 70 - P_2 &\leq 0; P_2 - 300 \leq 0; \\ 60 - P_3 &\leq 0; P_3 - 250 \leq 0; \\ P_1, P_2, P_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Se transformă problema de programare neliniară cu restricții într-o problemă de programare neliniară fără restricții, construind funcția Lagrange:

$$\Phi = 0,24P_1 + 0,0008P_1^2 + 0,16P_2 + 0,001P_2^2 + 0,18P_3 + 0,001P_3^2 + \lambda[625 - (P_1 + P_2 + P_3)] + \lambda_1(P_1 - 195)$$

și se folosește metoda gradientului cu pas constant.

Se alege un punct inițial de plecare: $P_1 = 190$; $P_2 = 250$; $P_3 = 185$, iar pentru multiplicatorii Lagrange valorile: $\lambda = 0,6$ și $\lambda_1 = 0,049$. Deasemeni, se alege pasul de deplasare: 500.

Iterația 1

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_1} = 0,24 + 0,0016 \cdot 190 - 0,6 + 0,049 = -0,007$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_2} = 0,16 + 0,002 \cdot 250 - 0,6 = 0,060$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_3} = 0,18 + 0,002 \cdot 185 - 0,6 = -0,05$$

$$P_1^{(1)} = 190 - 500 \cdot (-0,007) = 193,5$$

$$P_2^{(1)} = 250 - 500 \cdot (0,06) = 220,0$$

$$P_3^{(1)} = 185 - 500 \cdot (-0,05) = 210,0$$

Se verifică restricțiile și se observă că acestea nu sunt satisfăcute.

Iterația 2

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_1} = 0,24 + 0,0016 \cdot 193,5 - 0,6 + 0,049 = -0,002$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_2} = 0,16 + 0,002 \cdot 220 - 0,6 = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_3} = 0,18 + 0,002 \cdot 210 - 0,6 = 0$$

$$P_1^{(2)} = 193,5 - 500 \cdot (-0,002) = 194,5$$

$$P_2^{(2)} = 220 - 500 \cdot 0 = 220,0$$

$$P_3^{(2)} = 210 - 500 \cdot 0 = 210,0$$

Se verifică restricțiile și se observă că acestea nu sunt satisfăcute.

Iterația 3

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_1} = 0,24 + 0,0016 \cdot 194,5 - 0,6 + 0,049 = -0,001$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_2} = 0,16 + 0,002 \cdot 220 - 0,6 = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P_3} = 0,18 + 0,002 \cdot 210 - 0,6 = 0$$

$$P_1^{(3)} = 194,5 - 500 \cdot (-0,001) = 195$$

$$P_2^{(3)} = 220 - 500 \cdot 0 = 220,0$$

$$P_3^{(3)} = 210 - 500 \cdot 0 = 210,0$$

Se verifică restricțiile și se observă că în această iterație acestea sunt satisfăcute.

Rezolvarea problemelor PN fără restricții cu funcții MatLab

În general, o problemă de găsire a minimumului unei funcții neliniare în prezența unor restricții de egalitate sau inegalitate poate avea următoarea formă:

$$\min_X F(X) \quad (11.5)$$

în prezența restricțiilor:

$$\begin{aligned} g(X) &= A \cdot X \leq b \\ h(X) &= A_{eg} \cdot X = b_{eg} \\ X_{\min} &\leq X \leq X_{\max} \end{aligned} \quad (11.6)$$

unde:

- $X, b, b_{eg}, X_{\min}, X_{\max}$ – vectori;
- $g(X)$ și $h(X)$ – funcții ce returnează vectori;
- A, A_{eg} – matrice;
- $F(X)$ – funcție ce returnează un scalar.

Sintaxa

- $X = \mathbf{fmincon}(@fun, X0, A, b)$ (a)
- $X = \mathbf{fmincon}(@fun, X0, A, b, A_{eg}, b_{eg})$ (b)
- $X = \mathbf{fmincon}(@fun, X0, A, b, A_{eg}, b_{eg}, X_{\min}, X_{\max})$ (c)
- $X = \mathbf{fmincon}(@fun, X0, A, b, A_{eg}, b_{eg}, X_{\min}, X_{\max}, @restrictii)$ (d)
- $X = \mathbf{fmincon}(@fun, X0, A, b, A_{eg}, b_{eg}, X_{\min}, X_{\max}, @restrictii, options)$ (e)
- $[X, val_functie, convergenta, informatii] = \mathbf{fmincon}(...)$ (f)

unde:

- (g) procesul are ca punct de plecare punctul $X0$ și găsește minimumul funcției descrisă în fișierul fun , în prezența restricțiilor de inegalitate $A \cdot X \leq b$. $X0$ poate fi un vector, un scalar sau o matrice;
- (h) minimizează funcția descrisă în fișierul fun în prezența restricțiilor de egalitate și inegalitate $A_{eg} \cdot X = b_{eg}, A \cdot X \leq b$. Dacă restricțiile de inegalitate nu există atunci $A=[]$ și $b=[]$;
- (i) definește o mulțime de limite/granițe inferioare și superioare, corespunzătoare variabilelor de optimizat X , astfel încât soluția se găsește întotdeauna în intervalul $[X_{\min}, X_{\max}]$. Dacă restricțiile de egalitate nu există atunci $A_{eg}=[]$ și $b_{eg}=[]$;

- (j) minimizează funcția descrisă în fișierul *fun*, în prezența restricțiilor de egalitate $h(X)$ sau inegalitate $g(X)$, descrise în fișierul **restrictii**. Dacă X_{min} , respectiv X_{max} nu există atunci: $X_{min} = []$ și/sau $X_{max} = []$;
- (k) minimizează funcția descrisă în fișierul *fun*, în prezența restricțiilor de egalitate $h(X)$ sau inegalitate $g(X)$, descrise în fișierul *restrictii*, cu parametri de optimizare precizați în structura *options*;
- (l) X – soluția problemei;
val_funcție – returnează valorile funcțiilor obiectiv corespunzătoare soluției găsite;
convergenta – furnizează informații cu privire la convergența procesului. Dacă *convergenta* = 1, funcția converge la soluția X , dacă *convergenta* = 0, numărul maxim de evaluări a funcției sau numărul maxim de iterații a fost depășit, iar dacă *convergenta* = -1 procesul de optimizare este divergent;
informatii – oferă informații despre procesul de optimizare (numărul de iterații, numărul de evaluări ale funcției, algoritmul folosit).

Parametrii de intrare și ieșire

fun – fișier funcție ce conține expresiile funcțiilor obiectiv. Acest fișier are ca variabilă de intrare X , iar ca variabilă de ieșire un scalar F , a cărui valoare reprezintă funcția obiectiv evaluată în punctul X . Fișierul *fun* poate fi apelat astfel:

$$\mathbf{function} F = \mathbf{fun}(X)$$

restrictii – fișier funcție, în care se introduc atât restricțiile neliniare de inegalitate, cât și cele de egalitate $g(X) \leq 0$, $h(X) = 0$. Fișierul are ca variabilă de intrare un vector X , iar ca variabile de ieșire, doi vectori g și h . Fișierul poate fi apelat astfel:

$$\mathbf{function} [g, h] = \mathbf{restrictii}(X).$$

11.5. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Se va studia funcția Matlab prezentată în paragraful 11.3.
3. Pentru exemplul numeric prezentat în paragraful 11.4 se va folosi funcția Matlab **fmincon** pentru modelul matematic de optimizare inițial ce conține restricții.
4. Pentru exemplul numeric prezentat în paragraful 11.4 se va folosi funcția Matlab **fminunc** pentru modelul matematic de optimizare fără restricții.
5. Se vor compara rezultatele obținute la punctele 3 și 4 cu cele obținute folosind metoda gradientului cu pas constat folosită în paragraful 11.4.